808. 漸近的概週期性ト ergodic theorems, II

吉田 耕作(阪大)

§4. Bohr 概週期函數ノ平均ノ存在ノ證明.

§2 ニハ表記ノ證明ガ M.E.T. (mean ergodic theorem) カラ直チニ得ラレルト述ベマシタ。所ガ M.E.T. ニ於テハ weak ト云フ概念ガ入ツテクルタメニ Hahn-Banach ノ extension theorem ガ用ヒラレテアリマス(談話720). 上ノ平均ノ存在ニハ, weak ノ概念ガ入ツテコヌタメ, H.B. ノ定理ハ必要アリマセン。斯樣ニシテ Bohr ノ基本定理ガ初等的ナ新證明ヲ與ヘラレタコトニナリマス。即チ

$\boxed{\text{定理 1}}$ $-\infty < t < +\infty$ デ定義サレタ複素數値連續函數 $f(t)$ ガ概週期的ナリトスル。即チ任意ノ實數列 $\{h_n\}$ ニ對シテ $\{f_n(t)\}$, $f_n(t)=f(t+h_n)$ ガ實軸上全体デ一樣收斂スル部分列ヲ含ムトスル。然ラバ s ニ關シテ一樣ニ

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u}\int_s^{s+u} f(t)\,dt$$

ガ存在スル。

$\boxed{\text{證明}}$ 假定ハ norm $\|f_n-f_m\| = \underset{-\infty<t<+\infty}{\text{l.u.b.}} |f_n(t)-f_m(t)|$ ノ意味デ $\{f_n(t)\}$ ガ totally bounded ト云フコトデアル。今 $\{f_n(t)\}$ ノ全体ガコノ norm ノ意

味デ限ル Banach 空間ヲ E, E デノ norm 1 ノ線型作用素 T: $T\cdot f = g$, $g(t) = f(t+1)$ ヲ考ヘル。假定カラ $\{f^{(n)}\}$, $f^{(n)} = \frac{T+T^2+\cdots+T^n}{n} f$, ハ E デ compact ダカラ適當ニ部分列ヲトリ $\lim\limits_{n'\to\infty} f^{(n')} = f^*$. 明カニ $T\cdot f^* = f^*$.

故ニ $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)} = f^*$ ヲ云フニハ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{T+T^2+\cdots+T^n}{n}(f-f^*)$ $= 0$ ガ云ヘルトヨイ。所ガ之レハ $(f-f^*)$ ガ $(g-T\cdot g)$, $g \in E$, ノ形ノトキハ明カ。又 T ノ norm 1 ダカラ $(f-f^*)$ ガ $(g-T\cdot g)$ ノ形ノモノノ limes ノトキニモ明カデアル。然ルニ $\mathbb{1}$ ヲ以テ単位作用素ヲ表ハスト

$$f-f^* = \lim_{n'\to\infty}\left\{f - \frac{T+\cdots+T^{n'}}{n'}\cdot f\right\}$$

$$= \lim_{n'\to\infty}(\mathbb{1}-T)\left\{\frac{n'\mathbb{1}+(n'-1)T+(n'-2)T^2+\cdots+T^{n'-1}}{n'}\right\}f$$

ダカラ $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)} = f^*$ ガ云ヘタコトニナル。即チ t ニ対シテ一様ニ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n} f(t+m)$ ガ存在スル。從ツテ s ニ関シテ一様ニ

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(s+t+m)\,dt$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\int_0^1 f(s+t+m)\,dt = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^{n+1} f(s+t)\,dt$$

ガ存在スル。故ニ $f(t)$ ノ一様有界性カラ直チニ定理ヲ

得ル。

尚 Stepanoff, Muckenhaupt 等ノ概週期函數ノ平均ノ存在モ同方針デ證明サレルコトヲ注意シテオキマス。

§5. レツノ存在定理

$\boxed{\text{定理2}}$ T ヲ Banach 空間 E ノ E ヘノ線型作用素トシ, 逆作用素 T^{-1} ガ存在スルトスル。コノトキ

(1) $\|T^n\| \leqq$ 常數 C $\quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$

(2) 任意ノ $x \in E$ ニ對シテ $\{T^n \cdot x\}$, $(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$, ガ E デ totally bounded トスル。

然ラバ T ハ絶對値 1 ノ固有値ヲ少クトモ一ツ有スル。

$\boxed{\text{証明}}$ $F(n)=T^n \cdot x$ ガ整數ノ加法群ノ上デ Bochner-Neumann ノ意味デ概週期的ニナル。即チ任意ノ整数列 $\{m'\}$ ニ対シ, 距離 $\left(F(n+m'), F(n+m'')\right)$ $= \underset{-\infty<n<+\infty}{\mathrm{l.u.b.}} \|F(n+m')-F(n+m'')\|$ ノ意味デ $\{F(n+m')\}$ ガ totally bounded ニナル。何者, 假定 (2) カラ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ対シ $\{m'\}$ ノ部分列 $\{m'_i\}$ ヲ撰ビ

$$\|F(m'_i)-F(m'_j)\| = \|T^{m'_i} \cdot x - T^{m'_j} \cdot x\| \leqq \varepsilon$$
$$(i, j=1, 2, \cdots\cdots)$$

従ツテ (1) ニヨリ

$$\|F(n+m'_i)-F(n+m'_j)\| = \|T^{m'_i+n} \cdot x - T^{m'_j+n} \cdot x\| \leqq C\varepsilon$$

$(i, j, n = 1, 2, \cdots\cdots)$

ヲ得ルニヨル。

故ニ Bochner-Neumann ノ概週期函数論 (Trans. Am. Math. Soc. 1935, 21–50) ニヨリ $F(n)$ ノ Fourier 展開ガ出来ル：

$$\begin{cases} F(n) \approx \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n C_i & (|\lambda_i| = 1) \\ C_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{F(m)}{\lambda_i^m} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{T^m}{\lambda_i^m} \right) \cdot x \end{cases}$$

所ガ T ニ對シ M.E.T. ガ成立ツカラ

$\left\{ \begin{array}{l} C_i = T_{\lambda_i} \cdot x \text{；} T_{\lambda_i} \text{ハ } E \text{ ノ，} T \text{ ノ固有値 } \lambda_i \text{ ニ} \\ \text{属スル固有空間ヘノ，projection operator.} \end{array} \right.$

故ニ T ガ絶對値 1 ノ固有値ヲモタヌト云フコトハ，任意ノ λ, $|\lambda| = 1$, ニ対シ $T_\lambda = 0$ ト云フコト即チ任意ノ $x \in E$ ニ対シ $F(n) = T^n \cdot x$ ノ Fourier 展開ガ零ト云フコトニナル。 $\boxed{\text{Fourier 展開ノ一意性}}$ (Eindeutigkeitsatz) ニヨリ之ハ

$$T^n x = 0 \quad \text{for all } n \text{ and } x \in E$$

ヲ示スカラ矛盾デアル。即チ T ハ少クトモ一ツ絶對値 1 ノ固有値ヲ有スル。 以上。

$\boxed{\text{注意 1}}$ $\underset{n}{\text{l.u.b.}} \|T^n \cdot x\|$ ヲ以テ新ニ x ノ norm ヲ定義スレバ始メノ norm ト equivalent ナ topology ガ導入サレル。

然シテコノトキ，新シイ norm デ $\|Tx\| = \|x\|$ トナ

ルコト明カダカラ，上定理ハ Banach 空間デノ unitary operator (isometric operator) T ニ関スル定理ニナル。コノ注意ハ角谷静夫氏ニ負フ。

注意2　上ノ條件 (1) (2) ヲモツト緩メテ

(i)　T ニ對シテ M. E. T. ガ成立ツコト。

(ii) $F(n) = T^n \cdot x$ ガ weakly almost periodic 即チ任意ノ線型汎函数 f ニ對シ $f(T^n \cdot x) = \tilde{F}(n)$ ガ概週期的，

トシテモ定理ノ結果ガ成リ立ツコトハ云フマデモアリマセン。

§6. Fourier 解析

上ノ Fourier 解析ノ使ヒ方ト，M. E. T. カラ先ノ case $\boxed{\text{III}}$ (§3) ニ相應シテ

定理3　T^{-1} ガ存在シ，且ツ $\{T^n\}$，($n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$) ガ operator ノ norm ノ意味デ totally bounded ナラ

$$(3)\begin{cases} T^n \approx \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n T_{\lambda_i} & (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots) \\ |\lambda_i| = 1,\ T_{\lambda_i}^2 = T_{\lambda_i},\ T T_{\lambda_i} = T_{\lambda_i} T = \lambda_i T_{\lambda_i}, \\ T_{\lambda_i} T_{\lambda_j} = 0\ (i \neq j). \end{cases}$$

T_{λ_i} ハ，T ノ固有値 λ_i ニ屬スル固有空間ヘノ projection operator デアリマス。Eindeutigkeitsatz ニヨリ T ハ高々可附番無限個シカ絶対値 1 ノ固有値 (λ_i) ヲ

モタズ，且ツTハ之等ノλ_iトT_{λ_i}トニヨツテ完全ニ定マル。特ニTハコノトキ continuous spectrum ヲ有タヌ譯デアリマス。

Tニ種々ノ條件ヲ附シテ上ノ Fourier 展開 (3) ノ收斂ノ問題等ヲ論ズルト面白イ譯デアリマセウ。